Mengenlehre

Diskrete Strukturen

Uta Priss
ZeLL, Ostfalia

Sommersemester 2016

Agenda

Hausaufgaben

Grundbegriffe

Ein Paradox

Ausblick

Diese Fragen kann ich gleich beantworten:

„Ich finde es schade, dass man nachdem man abgegeben hat, nicht angezeigt bekommt, welche Eingabe falsch war.“
Dienstags nachmittags können Sie das Ergebnis sehen.

„Ich habe mit SetIx meine Eingaben überprüft. Alle waren soweit korrekt, aber meine Lösung ist falsch.“
„In der Hausaufgabe ist dies aber inkorrekt.“
Wenn Sie meinen einen Fehler in einer Aufgabe finden, schreiben Sie das bitte in die Diskussion unter der Aufgabe oder schicken Sie eine Email an mich.

„immer wieder von Neuem irreführend ist $\longrightarrow$ und $\Longrightarrow$“
Ja, die Definition im Buch ist unklar (ohne Formel).
In SetlX gibt es die Unterscheidung nicht.

Diese Fragen werden später behandelt

- Axiom (nächste Woche)
- „Gibt es eine allumfassende Menge, die grundsätzlich die Grundmenge darstellen kann?“ (morgen)
- $\bigcup_{j=1}^{n}$ (nach Ostern)
- „Wofür man das Kartesisches Produkt verwendet.“ (nach Ostern)

SetlX als Schiedsrichter

„Ich würde es gut finden, wenn man für die Beispiele im Buch Aufgaben in setlX bearbeiten könnte.“

Sie können vieles direkt ausprobieren:

```
=> {{1,2}}== {{2,1}};
< Result: true >
```

Hier verhält sich Setlx aber merkwürdig.

```
=> { a } >< { a } ;
```

Das resultierende Ergebnis ist inkorrekt.

NEW Re: Setlx Fehlverhalten [redacted] 2016 (CET))

a hat keinen Wert zugewiesen bekommen, er re
zu geben. (Hinweis: achte bei der Abgabe auf di

Was bedeuten die eckigen Klammern [] in einem Ergebnis bei SetlX?
Beispiel: {[a,b],[c,d]}
Entspricht das einem geordneten Paar?

NEW Schreibweise? [redacted] [Anonymous 6] Hide
Delete Reply Submissions (Sun Mar 13 02:26:19 pm 2016 (CET))

Wird mein Ergebnis tatsächlich als falsch gewertet, wenn ich die Wertepaare per Semikolon und nicht per Komma trenne?

Ist die Mächtigkeit hier 4 für jedes geordnete Paar oder 8 für jedes Element der Menge?

NEW **Re: Mächtigkeit** [redacted] **[Anonymous**
Hide Delete Reply Submissions (Sun Mar 13 07:45:24 pm 2016 (CET))

> Wenn ich mich recht an eine andere Vorlesung erinnere, ist die Mächtigkeit hier 4, aber unser Dozent meinte damals auch, dass diese Bezeichnung bei kartesischen Produkten auch nicht ganz formal korrekt ist.

NEW **Re: Mächtigkeit** [redacted]
[Anonymous 3] Hide Delete Reply Submissions (Sun Mar 13 08:03:34 pm (CET))

> "Mächtigkeit des kartesischen Produkts" ist meiner Meinung nach mathematisch ein wenig schief ausgedrückt. Du müsstest schon eine Menge definieren, wo für x gilt: x entspricht den geordneten

Fragen für heute

- de Morgan'schen Regeln
- Leere Menge
- Mengen von Mengen
- $\subset$ oder $\subseteq$
- Tupel
  „Wieso (1,2) und (2,1) ungleich sind versteh ich noch, aber wieso sind (2,2) und (2) nicht gleich“.
  Finden Sie ein Anwendungsbeispiel für (2,2) und (2).

Leere Menge und Mengen von Mengen

$\{\} \subseteq \{\{x, y\}, ...\}$ oder $\{\} \not\subseteq \{\{x, y\}, ...\}$?

Leere Menge und Mengen von Mengen

$\{\} \subseteq \{\{x, y\}, ...\}$ oder $\{\} \not\subseteq \{\{x, y\}, ...\}$?

Sind $\{4\}$ und $\emptyset$ disjunkt?

Leere Menge und Mengen von Mengen

$\{\} \subseteq \{\{x, y\}, ...\}$ oder $\{\} \not\subseteq \{\{x, y\}, ...\}$?

Sind $\{4\}$ und $\emptyset$ disjunkt?

$\{\{\}, 6, 2, 5\} = \{2, 5, 6\}$ oder $\{\{\}, 6, 2, 5\} \neq \{2, 5, 6\}$?

Leere Menge und Mengen von Mengen

$\{\} \subseteq \{\{x, y\}, ...\}$ oder $\{\} \not\subseteq \{\{x, y\}, ...\}$?

Sind $\{4\}$ und $\emptyset$ disjunkt?

$\{\{\}, 6, 2, 5\} = \{2, 5, 6\}$ oder $\{\{\}, 6, 2, 5\} \neq \{2, 5, 6\}$?

$\{0, \{1\}\} = \{0, 1\}$ oder $\{0, \{1\}\} \neq \{0, 1\}$?

Leere Menge und Mengen von Mengen

$\{\} \subseteq \{\{x, y\}, ...\}$ oder $\{\} \not\subseteq \{\{x, y\}, ...\}$?

Sind $\{4\}$ und $\emptyset$ disjunkt?

$\{\{\}, 6, 2, 5\} = \{2, 5, 6\}$ oder $\{\{\}, 6, 2, 5\} \neq \{2, 5, 6\}$?

$\{0, \{1\}\} = \{0, 1\}$ oder $\{0, \{1\}\} \neq \{0, 1\}$?

$\{1, \{4, 1\}, 3\} = \{1, 3, 4\}$ oder $\{1, \{4, 1\}, 3\} \neq \{1, 3, 4\}$?

$\subset$ oder $\subseteq$

$\{1, 2, 3\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ oder $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$?

Kann man aus $A \subseteq B$ schließen, dass $A = B$?

(Kann man aus $3 \leq 5$ schließen, dass $3 = 5$?)

Kann man aus $A = B$ schließen, dass $A \subseteq B$?

Was ist richtig?

$\{\triangle, \square, \bigcirc, \triangle, 1\}$ ist eine Menge.

$\{\square, \triangle, \square, \bigcirc\}$ ist eine Menge.

$\{\triangle\} \in \{\bigcirc, \square, \triangle\}$

$1 \notin \{\bigcirc, \square, \triangle\}$

$\{\square, \triangle, \bigcirc\} \subseteq \{\square, \triangle, \bigcirc\}$

$\{\square, \triangle, \bigcirc\} \subset \{\square, \triangle, \bigcirc\}$

Was ist richtig?

$\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$

$\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$

$\{\} \in \{1, 2\}$

$\{\} \subseteq \{1, 2\}$

Welche mengentheoretische Verknüpfung entspricht „und"?

- Sie hat einen Computer und einen Drucker gekauft.
- Der Mann mit der grünen Jacke und dem großen Hut.
- Studierende in den Studiengängen Informatik und Mathematik.

Potenzmenge

Bilden Sie die Menge aller Teilmengen von $\{\triangle, \square, \bigcirc\}$. Wie viele Elemente hat diese Menge?

Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer 0-elementigen, 1-elementigen oder 2-elementigen Menge?

Lehrerwitz

Unterricht. Die Kinder sollen mit Pappfiguren verschiedener Form und Farbe Mengen bilden. Fritz stellt folgende Menge zusammen: ein rotes Dreieck, ein blaues Rechteck und einen gelben Kreis.

Lehrer: "Aber Fritz! Du hast ja schon wieder keine Menge gebildet!"

Quelle:http://www.expertenaustausch.com/cantors-ende-t675592/31

Was sind die zwei Möglichkeiten Mengen zu definieren?

Was sind die zwei Möglichkeiten Mengen zu definieren?

$\{1, 2, 3\}$ – Aufzählung, Extension

$\{n \mid 1 \leq n \leq 3\}$ – Eigenschaft, set comprehension, Intension

de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Beweisen Sie die de Morgan'schen Regeln mit Venn-Diagrammen.

Idempotenz

$A \cap A = A$
$A \cup A = A$

Dies gilt zum Beispiel nicht für die Addition von Zahlen.
Für welche n ist $n + n = n$? Für welche m ist $m \times m = m$?

Transitivität

Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ dann $A \subseteq C$
Wenn $A \supseteq B$ und $B \supseteq C$ dann $A \supseteq C$

Das gilt auch für $\leq$ und $\geq$ und natürliche Zahlen.
Wenn $2 \leq 5$ und $5 \leq 7$ dann $2 \leq 7$.

Eigenschaften von Verknüpfungen (Operationen)

Bestimmen Sie, welche Verknüpfungen welche Eigenschaften haben:

	assoziativ	kommutativ	distributiv	idempotent	transitiv
$\cap$					
$\cup$					
$=$					
$\in$					
$\subseteq$					
$\setminus$					
$\subset$					
$\times$					

Eigenschaften von Verknüpfungen (Operationen)

Bestimmen Sie, welche Verknüpfungen welche Eigenschaften haben:

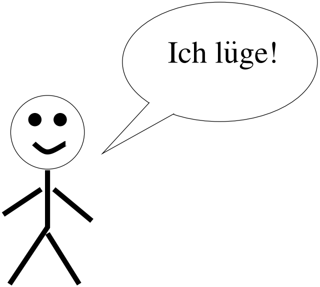
	assoziativ	kommutativ	distributiv	idempotent	transitiv
$\cap$	ja	ja	mit $\cup$	ja	
$\cup$	ja	ja	mit $\cap$	ja	
$=$		?			ja
$\in$					
$\subseteq$					ja
$\setminus$					
$\subset$					ja
$\times$			(z.B. mit $\cap$)		

Datentypen

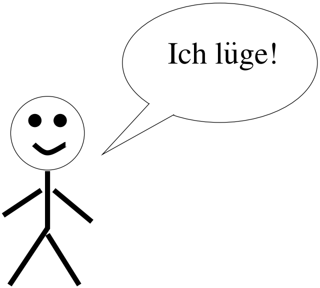
In der Mathematik sind Mengen der bevorzugte Datentyp. In Programmiersprachen sind es nicht Mengen, sondern ein anderer Datentyp, der normalerweise verwendet wird, wenn man mehrere Elemente hat.

- Wie heißt dieser Datentyp?
- Was sind die Unterschiede zwischen den beiden Datentypen?
- Was ist der Grund, warum in der Mathematik und bei Programmiersprachen diese unterschiedlichen Datentypen bevorzugt werden?
- Was ist mit Tupeln, Triplen, usw? Gehören die auch einem der beiden Datentypen an?

Das Lügner Paradox



Das Lügner Paradox



Entweder:
Der Lügner sagt die Wahrheit. $\Rightarrow$ Er lügt.
Oder:
Der Lügner lügt. $\Rightarrow$ Er sagt die Wahrheit.

Russells Paradox: die Menge aller Mengen

Intensional: $S := \{ T \mid T \text{ ist eine Menge } \}$
Extensional: $S :=$ { Menge der Zahlen, Menge der Verkehrszeichen, Menge aller Dinge im Universum, ..., S }.

Aber dann kann man auch definieren:

$\overline{S}$: die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
Aber da sich $\overline{S}$ nicht selbst enthält, muss es sich selbst enthalten!

Was bedeutet dies für die Mengenlehre?

- Mengen müssen genau definiert sein.
- Nicht alles, was man beschreiben kann ist eine Menge.

"Klassen" sind Ansammlungen von Elementen, die nicht unbedingt Mengen sind.
Es gibt keine "Menge aller Mengen", aber eine "Klasse aller Mengen".

Welches sind Mengen, welches sind Klassen?

- $n \mid n < 5$ und $n > 5$.
- Alle Dinosaurier, die je gelebt haben.
- Alle Mengen.
- Alle Untermengen aller Menge.
- Alle Potenzmengen aller Mengen.

Übung für Potenzmengen/Boolesche Algebra

SetlX-Tutorial Teil 3.

SetlX-Aufgaben für die Mengenlehre.

Nächste Woche

Mittwoch: für Erstsemester: Vorlesung in Wernigerode
für Nicht-Erstsemester: Übung im Hörsaal

Donnerstag: keine Vorlesung (Ostern)

Hinweis zu den Textbuchseiten:
Boolesche Algebra ist wichtig
DNF und KNF: Sie sollten wissen, was das ist. Herleitung ist nicht so wichtig.

Denken Sie an die SetlX-Mengenlehre-Aufgaben in LON-CAPA