Relationen

Diskrete Strukturen

Uta Priss
ZeLL, Ostfalia

Sommersemester 2016

Agenda

Nachtrag Boolesche Algebra

Binäre Relationen

Tipps

Benutzen Sie keine Umlaute in SetlX in LON-CAPA.

Variablen in SetlX müssen mit einem Kleinbuchstaben beginnen.

LON-CAPA-Fragen für die Bonuspunkte: die Fragen nach der Veranstaltung sollten Sie auf jeden Fall richtig beantworten. Bei den anderen sollten Sie im Laufe des Semesters besser werden.

Ordnungsrelationen behandeln wir später noch mal.

Im Kapitel über Funktionen: ignorieren Sie die Beispiele mit Z_8, Z_{11} usw.

Wie viele Distributivgesetze?

```
istDistributiv := procedure(set,operation1,operation2)
```

Wenn dies definiert ist:

```
istBooleanAlgebra:=
procedure(set,eins,null,operat1,operat2,unary_operat)
...
hatKomplement(set,operat1,unary_operat,eins)
```

warum ist dann dieses richtig:

```
istBooleanAlgebra({true,false},true,false,oder,und,nicht);
```

und dies falsch:

```
istBooleanAlgebra({true,false},true,false,und,oder,nicht);
```

Zweites Absorptionsgesetz

$$a \cdot (\overline{a} + b) = (a \cdot \overline{a}) + a \cdot b = a \cdot b$$

Komplementärgesetz: $a \cdot \overline{a} = 0$

Dieser Code wurde in LON-CAPA als richtig bewertet, ist aber falsch!

```
istAbsorptiv := procedure(set,operation1,operation2) {
  if (forall(x in set, y in set|
     (operation1(x,operation2(x,y)) == x )&&
     (operation1(x,operation2(!x,y)) == operation1(x,y))))

  {
     return true;
  }else {
     print ("nicht absorbtiv"); return false;
  }
};
```

Dieser Code wurde in LON-CAPA als richtig bewertet, ist aber falsch!

```
istAbsorptiv := procedure(set,operation1,operation2) {
  if (forall(x in set, y in set|
    (operation1(x,operation2(x,y)) == x )&&
    (operation1(x,operation2(!x,y)) == operation1(x,y))))

  {
    return true;
  }else {
    print ("nicht absorbtiv"); return false;
  }
};
```

Fehlermeldung: Operand of '!{}' is not a Boolean value.

Was ist eine Boolesche Algebra?

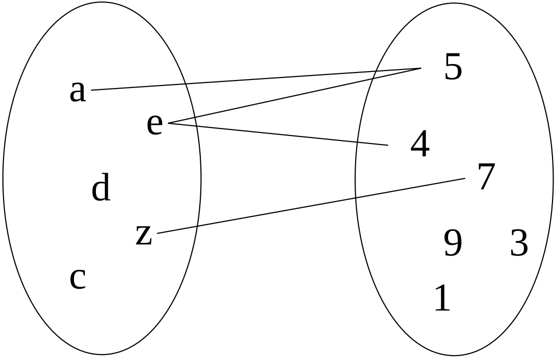
Was ist eine Boolesche Algebra?

Vervollständigen Sie diesen Code:

```
schnitt:=procedure(a,b) {... };
vereinigung:= procedure(a,b) {... };
grundmenge:= procedure(){return {1,2};};
rest := procedure(a) {return grundmenge() - a; };
hatKomplement(...);
istAbsorptiv(...);
istBooleanAlgebra(...);
```

Schreiben Sie diese Relation als Menge

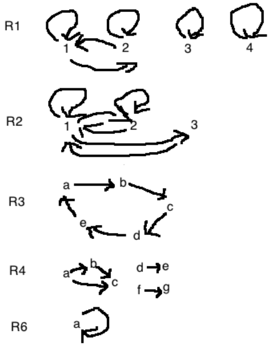
Schreiben Sie auch die Umkehrrelation als Menge.



	1	3	4	5	7	9
a				X		
c						
d						
e			X	X		
z					X	

Bestimmen Sie die Eigenschaften dieser Relationen und zeichnen Sie jeweils einen Graph.

- $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,1),(3,1),(1,2)\}$
- $R_3 = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,a)\}$
- $R_4 = \{(a,b),(b,c),(a,c),(d,e),(f,g)\}$
- $R_5 = \{\}$
- $R_6 = \{(a,a)\}$



R1: Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

R2: symmetrisch

R3: asymmetrisch und antisymmetrisch

R4: asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv

R6: Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv), antisymmetrisch

Leere Menge: falls in $A = \{\}$ definiert, gelten alle Eigenschaften, da dann $\forall_{a,b,c \in A}$ jeweils leer ist. Man kann kein Gegenbeispiel finden, für das die Eigenschaft nicht gilt.

Verkettungen

Bilden Sie folgende Verkettungen: $R_4 \circ R_3$
$R_3^{-1} \circ R_4^{-1}$
$R_4 \circ R_3 \circ R_6$
$R_6 \circ R_3$

- $R_3 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$
- $R_4 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (d, e), (f, g)\}$
- $R_5 = \{\}$
- $R_6 = \{(a, a)\}$

Ist $\circ$ kommutativ und assoziativ?
Haben Sie eine Vermutung bezüglich Verkettung und Umkehrrelation?

Bilden Sie $R_3 \cap R_4$
$R_3 \times R_5$

Unterschied zwischen antisymmetrisch und asymmetrisch

antisymmetrisch:
$\forall_{a,b \in A} : (a, b) \in R \text{ und } (b, a) \in R \Longrightarrow a = b$

asymmetrisch:
$\forall_{a,b \in A} : (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R$

Ist eines von beiden die Negation von „symmetrisch“:
$\forall_{a,b \in A} : (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R$

Welche dieser Relationen sind antisymmetrisch, asymmetrisch oder symmetrisch: „ist verheiratet mit“, „ist Vater von“, $\leq$, $<$.
Finden Sie weitere Beispiele.

Gegeben seien die Mengen $\{1, 2, 3, ...\}$ und $\{\{\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Welche der folgenden Relationen können Sie mit diesen Mengen definieren, so dass die Relationen nicht leer sind? (Sie dürfen auch das kartesische Produkt der Mengen mit sich selbst bilden.)

- $\leq$
- $\in$
- $=$
- $\subseteq$

Äquivalenzklassen

Sind Äquivalenzklassen Mengen oder Klassen?

- Welches sind die Äquivalenzklassen auf $\{1, 2, 3, ...\}$ bezüglich $=$?
- Welches sind die Äquivalenzklassen auf $\{1, 2, 3, ...\}$ bezüglich „hat den gleichen Rest, wenn durch 7 geteilt, wie“?
- Können Sie weitere Äquivalenzrelationen auf $\{1, 2, 3, ...\}$ definieren?

Definieren Sie eine Äquivalenzrelation für die folgenden Mengen von Äquivalenzklassen:

- $\{\{1, 3, 5, ...\}, \{2, 4, 6, ...\}\}$
- $\{\{\{1\}, \{3\}, \{17\}\}, \{\{3, 5\}, \{3, 8\}, \{17, 20\}\}, \{\{1, 5, 8\}, \{3, 4, 9\}\}\}$

Definieren Sie jeweils die Relation und finden Sie eine Beschreibung für jede Äquivalenzklasse.