Beweisverfahren

Diskrete Strukturen

Uta Priss
ZeLL, Ostfalia

Sommersemester 2016

Agenda

Hausaufgaben

Summen

Beweise

Vollständige Induktion

Unendliche Mengen

Umfrage-Ergebnis

80% von Ihnen finden die Flipped-Classroom-Methode gut oder egal und das Tempo gerade richtig.

65% von Ihnen besprechen die SetlX-Aufgaben mit Kommilitonen. Kaum jemand schreibt die Aufgaben nur ab.

Weitere Kommentare: Aufgaben teilweise zu schwer oder unklar. Probleme mit SetlX-Syntax. (Wenn Sie stundenlang über einer SetlX-Aufgabe grübeln, fragen Sie per Email nach einem Tipp.)

Mehr Versuche für die LON-CAPA-Aufgaben gewünscht.

Klausurvorbereitung: Besprechen wir am Ende des Semesters.

Ihre Fragen

- komplexe Zahlen? (nicht klausurrelevant)
- Was bedeutet das Wort „Induktion“?

Ihre Fragen

- komplexe Zahlen? (nicht klausurrelevant)
- Was bedeutet das Wort „Induktion“?
  Logik: „folgern“, Physik: hängt mit „leiten“ zusammen?

Behandeln wir heute oder morgen:

- Kann man eine Formel durch Umformen beweisen?
- Beispiel zur vollständigen Induktion
- Was kann man mit der vollständigen Induktion beweisen?
- Wieso sind die reellen Zahlen nicht abzählbar?
- Gibt es verschiedene Ausprägungen der Unendlichkeit?
- Hat also jedes Intervall von reellen Zahlen die gleiche Mächtigkeit?

SetlX: Finden Sie den Fehler

```
fibo := procedure(fibo) {
    if (fibo==0) {return fibo == 1; }
    else if (fibo > 0 ) {return fibo == fibo + fibo-1;}
    else{return false;}};

quadrat := procedure (eingabe){
    if (eingabe > 0){
    return( a == (eingabe-1*eingabe-1) + (2*eingabe-1));}
    else {return false; }};
```

SetlX: Finden Sie den Fehler

```
fibo := procedure(n) {
    if (n < 0) {return false; }
    else if (n == 0) {return 1; }
    else if (n == 1) {return 1; }
    else {return fibo(n-1) + fibo(n-2); }};
```

SetlX: Finden Sie den Fehler

```
quadrat := procedure(n) {
    if (n < 0) {return false; }
    else if (n == 1) {return 1; }
    else {return 2**quadrat(n - 1) + 2 * (n - 1); }};

quadrat := procedure(n){
    if (n < 0) {return false;}
    else if (n > 0) {
    return 2*quadrat(n-1)*(n-1)+ 2*(n-1);}};
```

LON-CAPA-Aufgabe

Aus $A \implies B$ und $B \implies C$ folgen diese Aussagen:

- $A \implies C$
- $\neg B \implies \neg A$
- $\neg C \implies \neg A$

Warum??

Formen Sie $A \implies B$ so um, dass nur $\neg, \wedge, \vee$ vorkommen und beweisen Sie die obigen Aussagen.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Was bedeuten diese Formeln?

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} c a_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{jk}$$

Setzen Sie für n und m kleine Werte ein (z.B. 3 oder 4) und schreiben Sie die Formeln ohne Summenzeichen hin.

Wie kann man dies beweisen? Welche Gesetze liegen diesen Rechenregeln für Summen zugrunde?

Wie schreibt man dies mit Summenzeichen: 1-3+5-7+9-11.

„Summen und Produktzeichen sind wie Schleifen in der Informatik.“

Mathematische Gesetze sind oft in der Form:
„alle *a* haben eine Eigenschaft *b*“.

$\forall_{x \in M} : A(x) \implies B(x)$

Schreiben Sie dieses Gesetz in dieser Form:

(Rechenregeln für Summen)
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n, b_0, ...b_n, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$

$\sum_{k=0}^{n} ca_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k$

Wie kann man ein mathematisches Gesetz in der Form

$$\forall_x : A(x) \Longrightarrow B(x)$$

beweisen?

(Wie kann man es logisch äquivalent schreiben?)

Beweisverfahren für $\forall_x : A(x) \implies B(x)$

- direkter Beweis:
  $\forall_x : A(x) \implies a_1(x), a_1(x) \implies a_2(x), ..., a_n(x) \implies B(x)$
- Fallunterscheidung (Spezialfall des direkten Beweises)
- Kontraposition:
  $\forall_x : \neg B(x) \implies \neg A(x)$
- Widerspruchsbeweis:
  Zeige $\exists_x : A(x) \wedge \neg B(x)$ führt zu einem Widerspruch

Welches Beweisverfahren haben wir für die Rechenregeln für Summen benutzt?

Beweisen Sie, dass die Summe zweier geraden Zahlen wieder gerade ist.

Was für ein Beweisverfahren haben Sie verwendet?

Beweisen Sie mit Kontraposition:

x^2 ist gerade $\Longrightarrow x$ gerade

Die Wurzel aus 2 ist nicht rational

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists_{a,b} : \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wobei $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt sei.

$\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt $\Longrightarrow$ entweder a oder b ist ungerade.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Longrightarrow a^2$ ist gerade $\Longrightarrow a$ ist gerade.

a gerade $\Longrightarrow \exists_c : a = 2c \Longrightarrow a^2 = 4c^2 = 2b^2$
$\Longrightarrow 2c^2 = b^2 \Longrightarrow b^2$ ist gerade $\Longrightarrow b$ ist gerade.

Was für ein Beweisverfahren ist dies?

Zeigen Sie, dass zwei Äquivalenzklassen genau dann disjunkt sind, wenn sie nicht gleich sind.

Zur Erinnerung: $[a] = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$
Kann die leere Menge eine Äquivalenzklasse sein?

Was für ein Beweisverfahren haben Sie verwendet?

Ihre Fragen

- Kann man eine Formel durch Umformen beweisen?
- Was kann man mit der vollständigen Induktion beweisen?

Eigenschaften der natürlichen Zahlen

Zählen Sie Eigenschaften der natürlichen Zahlen auf.

Welche Eigenschaften beschreiben genau die Struktur der natürlichen Zahlen?

Peano Axiome der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $n + 1$.
- 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- ... (Zwei weitere Axiome)

Peano Axiome der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $n + 1$.
- 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- ... (Zwei weitere Axiome)

Was bedeuten diese Axiome für die vollständige Induktion?
Für welche Zahlen gilt die vollständige Induktion?
Was für ein Beweisverfahren ist die vollständige Induktion?

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)=n^2$$

Erklären Sie

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 2\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

Unendliche Mengen

Welche Teilmengenbeziehungen gelten zwischen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

Hat eine echte Teilmenge immer weniger Elemente als die Originalmenge?

- Gibt es mehr natürliche Zahlen als gerade Zahlen?
- Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen?
- Gibt es mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen?

Zwei Mengen A und B sind gleich mächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \Rightarrow B$ gibt, die jedem Element aus A ein Element aus B zuordnet.

Konstruieren Sie eine solche Abbildung zwischen den geraden Zahlen und $\mathbb{N}$ und zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$.

Wie viele rationale Zahlen?

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Wie viele rationale Zahlen?

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Was für ein Beweisverfahren ist dies?

Wie viele natürliche, gerade und rationale Zahlen gibt es?

1	2	3	4	5	6	7	8	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...
$1/1$	$1/2$	$2/1$	$3/1$	$2/2$	$1/3$	$1/4$	$2/3$	...

Wie viele reelle Zahlen?

Angenommen man hätte eine Aufzählung der reellen Zahlen, wie wir sie eben für die rationalen Zahlen konstruiert haben.

Kann man dann zeigen, dass das für die reellen Zahlen nicht geht?

Was für ein Beweisverfahren ist dies?

Ihre Fragen

- Wieso sind die reellen Zahlen nicht abzählbar?
- Gibt es verschiedene Ausprägungen der Unendlichkeit?
- Hat also jedes Intervall von reellen Zahlen die gleiche Mächtigkeit?